Урок №63-64 **8-М** **15.11.2-023**

Тема: Формулы приведения

СРОК СДАЧИ ДО 16.11.2023

Изложение нового материала.

<u>Определение:</u> Формулами приведения называются соотношения, с помощью которых значения тригонометрических функций аргументов $\pi/2 \pm\alpha$; $\pi \pm\alpha$;

$3\pi/2\pm\alpha$; $2\pi \pm\alpha$ выражаются через значения sin α, cos α, tg α, ctg α.

Когда мы находим значения тригонометрических функций с помощью единичной окружности, мы используем уже известные табличные значения.

Обратим внимание, что таблица значений тригонометрических функций составлена для углов от 0° до 90°. Это объясняется тем, что значения тригонометрических функций для остальных углов сводятся к значениям тригонометрических функций для острых углов. А формулы, которые позволяют сделать это, называются формулами приведения.

Формулы приведения

<u>Формулы приведения необходимы</u> для того, чтобы привести вычисления значений тригонометрических функций для любого аргумента к вычислению тригонометрический функций для аргумента $[0; \pi/2]$

Формулы приведения основаны на симметрии вращательного движения (см информационная схема «Свойства вращательного движения»)

1. Докажем, что для любого α

$\sin(\alpha+2\pi k) = \sin\alpha$, $\cos(\alpha+2\pi k) = \cos\alpha$, где к принадлежит множеству целых чисел

Информационная схема (свойство 1)

Это свойство выражает периодичность вращательного движения.

Так как точка P_t совпадает на окружности с точкой $P_{t+2\pi к}$, то их абсциссы и ординаты равны, поэтому равны значения.

$\sin(t+2\pi k) = \sin t$,

$\cos(t+2\pi k) = \cos t$

2. Запишем в координатной форме свойство 3 вращательного движения.

Абсцисса точки $P_{t+\pi}$ $\cos(t+\pi)$

Абсцисса точки P_t $\cos t$

Так как точки диаметрально противоположны, их абсциссы отличаются только знаком (противоположные числа).**$\cos(t+\pi) = -\cos t$**

Ординаты диаметрально противоположных точек тоже являются противоположными числами, поэтому $\sin(t+\pi) = -\sin t$.

3. Запишем в координатной форме свойство 5 вращательного движения.

Так как точки P_t и $P_{-t+\pi}$ симметричны относительно оси ординат, то их ординаты равны, то есть $\sin(-t+\pi) = \sin(\pi - t) = \sin t$, а абсциссы – противоположные числа $\cos(-t+\pi) = \cos(\pi - t) = -\cos t$

4. Ранее были получены следующие формулы

$\sin(\pi/2 - t) = \cos t$

$\cos(\pi/2 - t) = \sin t$

Формулы приведения для тангенса и котангенса получаются как следствие полученных формул для синуса и косинуса.

$\mathrm{tg}(t+2\pi k) = \mathrm{tg}\, t$, $\mathrm{ctg}(t+2\pi k) = \mathrm{ctg}\, t$

Формул приведения много, а точнее 32. И все формулы надо знать. К счастью существует простое мнемоническое правило, позволяющее быстро воспроизвести любую формулу приведения. Правда для этого надо хорошо знать основы тригонометрии – единичную окружность и способы работы с ней.

ФОРМУЛЫ ПРИВЕДЕНИЯ

$\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha)=\cos\alpha$ $\quad$ $\sin(\frac{3\pi}{2}+\alpha)=-\cos\alpha$ $\quad$ $tg(\frac{\pi}{2}+\alpha)=-ctg\alpha$ $\quad$ $tg(\frac{3\pi}{2}+\alpha)=-ctg\alpha$

$\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\cos\alpha$ $\quad$ $\sin(\frac{3\pi}{2}-\alpha)=-\cos\alpha$ $\quad$ $tg(\frac{\pi}{2}-\alpha)=ctg\alpha$ $\quad$ $tg(\frac{3\pi}{2}-\alpha)=ctg\alpha$

$\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha)=-\sin\alpha$ $\quad$ $\cos(\frac{3\pi}{2}+\alpha)=\sin\alpha$ $\quad$ $ctg(\frac{\pi}{2}+\alpha)=-tg\alpha$ $\quad$ $ctg(\frac{3\pi}{2}+\alpha)=-tg\alpha$

$\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\sin\alpha$ $\quad$ $\cos(\frac{3\pi}{2}-\alpha)=-\sin\alpha$ $\quad$ $ctg(\frac{\pi}{2}-\alpha)=tg\alpha$ $\quad$ $ctg(\frac{3\pi}{2}-\alpha)=tg\alpha$

$\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha$ $\quad$ $\sin(2\pi+\alpha)=\sin\alpha$ $\quad$ $tg(\pi+\alpha)=tg\alpha$ $\quad$ $tg(2\pi+\alpha)=tg\alpha$

$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$ $\quad$ $\sin(2\pi-\alpha)=-\sin\alpha$ $\quad$ $tg(\pi-\alpha)=-tg\alpha$ $\quad$ $tg(2\pi-\alpha)=-tg\alpha$

$\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$ $\quad$ $\cos(2\pi+\alpha)=\cos\alpha$ $\quad$ $ctg(\pi+\alpha)=ctg\alpha$ $\quad$ $ctg(2\pi+\alpha)=ctg\alpha$

$\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$ $\quad$ $\cos(2\pi-\alpha)=\cos\alpha$ $\quad$ $ctg(\pi-\alpha)=-ctg\alpha$ $\quad$ $ctg(2\pi-\alpha)=-ctg\alpha$

ФОРМУЛЫ ПРИВЕДЕНИЯ

α	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$	$2\pi-\alpha$	$2\pi+\alpha$
$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$
$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$
$tg\alpha$	$ctg\alpha$	$-ctg\alpha$	$-tg\alpha$	$tg\alpha$	$ctg\alpha$	$-ctg\alpha$	$-tg\alpha$	$tg\alpha$
$ctg\alpha$	$tg\alpha$	$-tg\alpha$	$-ctg\alpha$	$ctg\alpha$	$tg\alpha$	$-tg\alpha$	$-ctg\alpha$	$ctg\alpha$

Задание для учащихся: внимательно просмотрите формулы приведения и заметьте сходство и различия в них.

1. Каждая формула связывает между собой либо синус с косинусом, либо тангенс с котангенсом. Причём, первая функция либо меняется на вторую, либо нет.

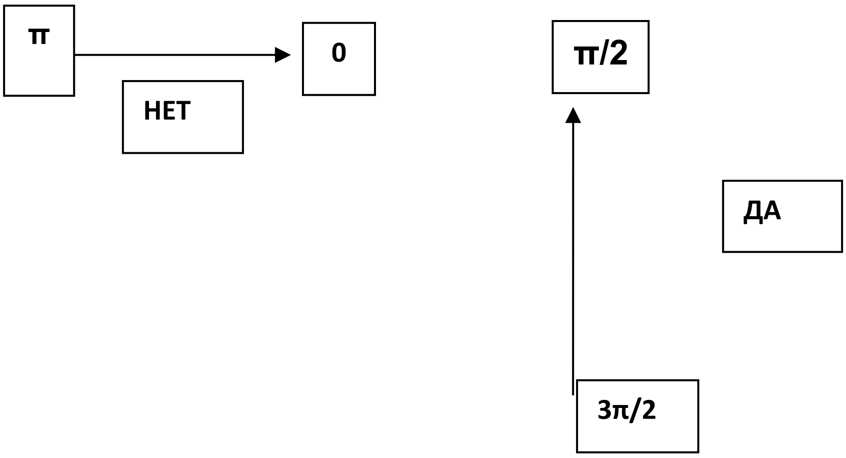
В левой части формулы аргумент представляет собой сумму или разность одного из «основных координатных углов»: π/2 ; π ; 3π/2; 2π и острого угла $\boldsymbol{\alpha}$, а в правой части аргумент $\boldsymbol{\alpha}$.

2. В правой части знак перед функцией либо «плюс», либо «минус».

Мнемоническое правило (мнемоника – искусство *запоминания*).

Достаточно задать себе два вопроса:

1. Меняется ли функция на кофункцию?
Ответ: Если в формуле присутствуют углы **π/2** или **3π/2** - это углы вертикальной оси, киваем головой по вертикали и сами себе отвечаем: «Да», если же присутствуют углы горизонтальной оси **π** или **2π**, то киваем головой по горизонтали и получаем ответ: «Нет».



2. Какой знак надо поставить в правой части формулы?
Ответ: Знак определяем по левой части. Смотрим, в какую четверть попадает угол, и вспоминаем, какой знак в этой четверти имеет функция, стоящая в левой части.

Для применения формул приведения необходимо помнить правило:

Название функции не меняется, если к аргументу левой части добавляется – **π или + π,** меняется, если добавляются числа ± **π/2** или ± **3π/2.**

Знак в правой части определяется знаком левой при 0< t <π/2.

2.Домашнее задание.

1. Тренинг по формулам приведения. Отработка мнемонического правила.

Упростите выражение

1) cos (π/2 – α) =
2) sin (π + α) =
3) ctg (3π/2 – α) =
4) tg (3π/2 + α) =
5) sin (2π – α) =

2. Тест “Формулы приведения»

Упростите выражение для угла α

Вариант -1	cos α	ctg α	- tg α	- ctg α	- cos α
cos (2π – α)					
sin (π/2 – α)					
tg (3π/2 – α)					
tg (180^0 – α)					
ctg (360^0 - α)					
sin (270^0 - α)					

Вариант -2	ctg α	sin α	- ctg α	- sin α	- cos α
cos (3π/2 + α)					
ctg (π + α)					

$\sin(2\pi + \alpha)$					
$\sin(180^0 + \alpha)$					
$\cos(90^0 - \alpha)$					
$\text{tg}(270^0 + \alpha)$					

3. Найдите ошибку

1) $\sin(3\boldsymbol{\pi/2 +} \alpha) = -\sin\alpha$

2) $\text{tg}(\pi + \alpha) = -\text{tg}\alpha$

3) $\cos(\pi/3 + \alpha) = \sin\alpha$